

VALORACIÓN DE PROYECTOS DE INVERSIÓN CON OPCIONES REALES DE CRECIMIENTO EN UN CONTEXTO DE TIPOS DE INTERÉS VARIABLES

Federico Palacios González
Salvador Rayo Cantón
José M. Herrerías Velasco
Antonio M. Cortés Romero

fpalacio@ugr.es
srayo@ugr.es
jmherrer@ugr.es
amcortes@ugr.es

Universidad de Granada

Palabras Clave: VAN, Opciones Reales, Flexibilidad Estratégica, Simulación, Procesos de Íto.

RESUMEN.

La valoración de la flexibilidad estratégica, en el análisis y selección de proyectos de inversión, mediante *Opciones Reales* constituye, últimamente, uno de los aspectos más relevantes de las finanzas empresariales. Las decisiones de *Presupuesto de Capital* recogen distintos trabajos que reflejan el hecho de que los directivos suelen ser conscientes de la existencia de opciones de crecimiento en los proyectos de inversión-financiación, aunque suelen desconocer los modelos normativos de valoración que proporciona la *Teoría de Opciones*. La metodología y los modelos analíticos de valoración de opciones reales compuestas en proyectos de inversión suelen considerar planteamientos algo simplificados, tanto en el proceso decisional del inversor como en la consideración de tasas de descuento y de volatilidades constantes. Las decisiones contingentes del inversor durante el desarrollo del proyecto y la evolución del mercado alteran las características de riesgo del mismo y no parece adecuado que tasas de descuento y volatilidad puedan considerarse constantes. La complejidad analítica del tratamiento conjunto de tasas de interés y de volatilidad variables aconsejan aplicar métodos de simulación del subyacente o valor del proyecto bajo condiciones de variabilidad en dichos parámetros. El primer objetivo de este trabajo es desarrollar una metodología para la valoración de proyectos de inversión con opciones reales en un contexto de tasas de descuento variables. El segundo objetivo es obtener un modelo que permita una investigación posterior, de carácter empírico, sobre el comportamiento de los directivos de las empresas cuando valoran proyectos de inversión con opciones reales de crecimiento.

1. INTRODUCCIÓN.

La literatura financiera referente a las decisiones de *Presupuesto de Capital* recoge distintos trabajos que inducen a pensar que los directivos, como consecuencia de su experiencia empresarial, suelen ser conscientes, de forma intuitiva, de la existencia de opciones de crecimiento en los proyectos de inversión-financiación que gestionan, aunque, en muchos casos, no conocen los modelos de valoración, de tipo normativo, que proporciona la *Teoría de Opciones* (Dixit y Pindyck, 1994). De alguna manera estos estudios vienen a corroborar una correspondencia entre la intuición de los directivos y la estructura formal de las *opciones*. Es decir, los responsables de las empresas parece que piensan en términos de opciones sin tener forzosamente una formación sobre valoración de opciones (Kemna, 1991 y Myers, 1987).

Si bien la técnica del DFC, producto de la síntesis de las proposiciones de la Teoría de Modigliani-Miller y del modelo de equilibrio de activos financieros -CAPM- desarrollado por Sharpe y Litner, ha sido un campo de indudable debate entre los teóricos y prácticos de las finanzas, en torno a su capacidad para evaluar los aspectos estratégicos u opciones reales de los proyectos de inversión, (Hayes-Abernathy, 1980; Hayes-Garvin, 1982), actualmente se considera que este método debería seguir siendo el criterio a aplicar en las decisiones de Presupuesto de Capital, pero que tiene que ser ampliado con los Modelos de Valoración de Opciones cuando se desea valorar la flexibilidad estratégica de un proyecto de inversión-financiación (Myers-1984).

La principal crítica que recibe el criterio del VAN clásico es que el inversor adopta su decisión inicial de aceptación/rechazo de la inversión bajo el supuesto de que permanece pasivo frente a las situaciones *reales* que se le presentan durante la vida del proyecto. En el mundo actual, las nuevas situaciones que se presentan a la empresa van seguidas de nuevas decisiones en un intento de adaptación a las mismas. No considerar este hecho supone obviar el valor que aportan las posibilidades de actuación que pueda presentar un proyecto de inversión y que le permiten adaptarse mejor a la evolución del entorno.

Este debate en torno al criterio del VAN clásico dio paso a pensar en los métodos de valoración de opciones como alternativa para resolver los inconvenientes anteriormente analizados, ya que, por una parte, permiten un tratamiento analítico de los efectos asimétricos derivados de escenarios favorables frente a los desfavorables y, por otra, resuelven el problema de la tasa de actualización adecuada para descontar flujos de

caja asumiendo, primero, la posibilidad crear carteras sintéticas con flujos de caja y riesgo similares a la opción y, segundo, aplicando valoración neutral al riesgo. De esta manera el criterio *VAN clásico* se viene sustituyendo por el criterio *VAN ampliado*, siendo este último la suma del primero más el valor de la cartera de opciones que recogen el efecto estratégico, flexibilidad, asimetría o adaptabilidad del proyecto de inversión, según la siguiente expresión (Trigeorgis, 1993):

$$VAN(\text{ampliado}) = VAN(\text{tradicional}) + \underbrace{OR1 \ \& \ OR2 \ \& \ ... \ \& \ ORn}_{\text{Flexibilidad}}$$

Este tema constituye actualmente un campo de investigación dentro de las finanzas denominado *Opciones Reales* o *Flexibilidad*, al ser el activo subyacente un activo real o proyecto de inversión-financiación.

Sin embargo, la valoración de las opciones reales de crecimiento, según los modelos de valoración de opciones, también tiene dos limitaciones básicas, como son la utilización de una tasa de interés libre de riesgo y una volatilidad constantes para todo el horizonte temporal (Black-Scholes, 1973 y Trigeorgis, 1993). En un mundo financiero como el actual, caracterizado por la existencia de tasas libres de riesgo que dan lugar a ETTI variables nos lleva en este trabajo, como primera aproximación al problema, a considerar la valoración de las opciones reales de crecimiento en un contexto de ETTI variable aplicando una metodología de la simulación¹.

El trabajo consta de las siguientes partes. En el apartado 2 se define el concepto de opción real de crecimiento o flexibilidad estratégica de un proyecto de inversión. En el apartado 3 se define el modelo estocástico de evolución del activo subyacente (valor del proyecto de inversión). En el punto 4 la metodología y el algoritmo de simulación. Por último, en el apartado 5 se procede a valorar la opción de crecimiento y en el sexto se desarrollan unos ejemplos numéricos.

¹ Si bien en este trabajo nos centraremos exclusivamente en el tratamiento de la tasa de descuento, el hecho de que los proyectos de inversión presenten un riesgo cambiante a lo largo del tiempo, consecuencia de las actuaciones del directivo sobre el propio proyecto y de la influencia del mercado, requiere, de cara a dotar al proceso de valoración de las opciones reales de un mayor realismo, que la volatilidad de los flujos de caja se considere también variable.

2. LAS OPCIONES REALES DE CRECIMIENTO O FLEXIBILIDAD ESTRATEGICA EN UN PROYECTO DE INVERSIÓN.

Básicamente, una opción call es un contrato que otorga el derecho (sin asumir obligaciones) a su propietario a comprar un determinado activo (subyacente) a un precio (precio de ejercicio) en un período de tiempo especificado (fecha de vencimiento). Por analogía a las opciones financieras, las opciones estratégicas son aquellas que otorgan a su propietario el derecho a invertir capital en activos productivos a un precio fijo y predeterminado y en una fecha fija. La definición anterior permite que la flexibilidad estratégica de los proyectos u opciones reales puedan valorarse como una opción call si se realiza una adaptación adecuada de las variables del proyecto de inversión a las variables de la fórmula de Black-Scholes (Myers, 1977 y Kester 1984). En este caso, el activo subyacente es el valor actual de los flujos de caja más el valor de cualquier nueva oportunidad de crecimiento esperado que provenga de la propiedad o utilización de los activos (Kester, 1984), siendo el tiempo que resta hasta el momento que se mantiene vigente esa oportunidad de inversión, el horizonte temporal de la opción.

La posibilidad de que una inversión en un proyecto piloto posibilite sucesivas inversiones de crecimiento en el futuro conduce al concepto de *opciones reales de crecimiento múltiples o compuestas*. Black-Scholes (1973) desarrolla la expresión analítica para valorar una opción call y que tiene aplicación en proyectos de inversión con opciones de crecimiento. Geske (1979) desarrolla la fórmula que permite valorar las oportunidades secuenciales en proyectos de inversión, ya que la existencia de un derecho de compra sobre una acción se considera como la compra de una opción call sobre las acciones de la empresa, donde las acciones, a su vez, son una opción de compra sobre el valor de los activos de una empresa, con precio de ejercicio el valor nominal de las deudas en la fecha de vencimiento. Por tanto, estamos en presencia de una *opción sobre una opción* u *opción compuesta europea que no paga dividendos*.

Si bien el estudio de la flexibilidad de un proyecto de inversión se ha centrado fundamentalmente en la evolución del activo subyacente (que es el valor actual de los flujos de caja más el valor de cualquier nueva oportunidad de crecimiento esperada), es decir, en los flujos de caja del proyecto más en las sucesivas opciones de crecimiento que estén presentes en el mismo. Pero también existe la posibilidad de que en el proyecto se genere un valor añadido, derivado de la flexibilidad que se origina por variaciones en la tasa de descuento, incluso en el supuesto de considerar proyectos que

cuentan con flujos de caja ciertos y conocidos a priori o que no tienen opciones reales (Ingersoll-Ross, 1992 y Trigeorgis, 1996).

Por último, en un proyecto con opciones reales y en un contexto de valoración neutral al riesgo, si los flujos de caja son inciertos y están correlacionados con las tasas de interés del mercado (y, por tanto, la rentabilidad del mercado), el coste de capital de la empresa será distinto de la tasa de interés de un activo libre de riesgo. Las probabilidades neutrales al riesgo serán derivadas de los valores de mercado de los flujos de caja y de la información de las tasas de interés, siendo por consiguiente variables a lo largo del horizonte temporal, en tanto que dependen de las variaciones de la ETTI.

3. MODELO ESTOCÁSTICO PARA EL SUBYACENTE.

El modelo que permite calcular el valor que sigue el activo subyacente (valor del proyecto de inversión), necesario para obtener el valor de la opción correspondiente, es un proceso de difusión denominado Movimiento Browniano Geométrico, con ecuación diferencial estocástica

$$\frac{dV}{V} = rdt + \sigma dZ_1 \quad (1)$$

Donde r representa una tasa de interés libre de riesgo, σ la volatilidad del subyacente V y Z_1 un proceso de Wiener estandar. En el presente trabajo se introducen modificaciones a este modelo base y se proporciona una metodología para calcular el valor de la opción compuesta de crecimiento mediante simulación. Permitiremos que la tasa libre de riesgo r deje de ser constante para convertirse en función $r(V, t)$ de forma que pueda incorporarse al modelo una estructura temporal de tipos de interés libres de riesgo. Piénsese ahora en valorar una sucesión de opciones reales encadenadas en el tiempo y constituyendo una opción compuesta. El proceso analítico ofrece tal complejidad que resulta más rentable recurrir a técnicas de simulación. Como veremos en el próximo epígrafe, resulta factible simular trayectorias de un proceso que satisface la expresión (1).

4. SIMULACION DE TRAYECTORIAS DEL SUBYACENTE.

Suponemos la existencia de k opciones reales que expiran en los instantes t_1, t_2, \dots, t_k , dentro del contexto de un proyecto de inversión con un horizonte temporal T . Para una estimación del valor esperado que dicha flexibilidad aportará al proyecto

utilizaremos la media aritmética de los valores aportados sobre una muestra suficientemente grande de trayectorias simuladas del subyacente que en este caso será un proceso estocástico V que representa el valor del proyecto en cada instante t . Realmente utilizaremos los valores que el proceso estocástico alcanza en los k tiempos de ejercicio de cada una de las opciones y el finalizar el proyecto.

4.1 Movimiento Browiano Geométrico.

El subyacente sigue un proceso estocástico con ecuación diferencial (1). Esto significa que la innovación que se produce en el proceso durante un intervalo de tiempo τ es tal que

$$V(t) = V(t - \tau) \exp(X(\tau)) \quad (3)$$

donde $X(\tau)$ es una variable aleatoria

$$N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau, \sigma^2\tau\right) \quad (4)$$

La simulación en este caso es sencilla y bastante rápida, lo que permite obtener estimaciones bastante precisas del valor de la opción compuesta. Se procederá de la siguiente forma

- 1- Para $i = 1, 2, \dots, k+1$ calcúlese $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ considerando que $t_0 = 0$ y $t_{k+1} = T$
- 2- Para el número de trayectorias deseado se repite desde 2 hasta 4
- 3- Para $i = 1, 2, \dots, k+1$ se simulan los valores $X(\tau_i)$ con distribución $N(\mu\tau_i, \sigma^2\tau_i)$
- 4- Dado V_0 conocido, para $i = 1, 2, \dots, k+1$ se calcula $V(t_i) = V_{t_{i-1}} \exp(X(\tau_i))$.

4.2 Proceso de difusión con deriva variable.

El subyacente sigue un proceso de difusión capaz de incorporar una estructura temporal de tipos de interés sin riesgo con ecuación diferencial estocástica

$$\frac{dV}{V} = r(t)dt + \sigma dZ \quad (5)$$

Sea

$$R(t) = \int r(t)dt \quad (6)$$

La innovación del proceso durante el intervalo $(t - \tau, t)$ es

$$V(t) = V(t - \tau) \exp(X(t, \tau)) \quad (7)$$

siendo $X(t, \tau)$ una variable aleatoria con distribución

$$N(G(t, \tau), \sigma^2 \tau) \quad (8)$$

donde

$$G(t, \tau) = R(t) - R(t - \tau) - \frac{1}{2} \sigma^2 \tau \quad (9)$$

En este caso el algoritmo de simulación es bastante similar al proporcionado en 3.1.

- 1- Para $i = 1, 2, \dots, k+1$, calcúlese: $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, $G(t_i, \tau_i)$ considerando que $t_0 = 0$ y $t_{k+1} = T$.
- 2- Para el número de trayectorias deseado repítase desde 2 hasta 4.
- 3- Para $i = 1, 2, \dots, k+1$ simúlense sendos valores $X(t_i, \tau_i)$ con distribución normal $N(G(t_i, \tau_i), \sigma^2 \tau)$.
- 4- Dado V_0 conocido, para $i = 1, 2, \dots, k+1$ calcúlese $V(t_i) = V(t_{i-1}) \exp(X(t_i, \tau_i))$.

5. ESTIMACIÓN DEL VALOR DE LA OPCIÓN DE CRECIMIENTO.

Simulada una trayectoria del subyacente, será el valor alcanzado por éste en el momento de expiración de la opción quien determine si se ejerce o no dicha opción de crecer. Si la decisión es no crecer, el valor de la opción es cero y si por el contrario se ejerce, entonces el valor de la opción en el instante final para esta trayectoria es la diferencia entre el beneficio adicional obtenido a causa del crecimiento (tasa de crecimiento multiplicado por el resultado final del subyacente) y el valor final de la inversión adicional necesaria para la expansión del proyecto. Esta diferencia es una variable aleatoria cuyo valor esperado, actualizado al instante inicial, es el valor de la opción de crecimiento. El valor final observado sobre un determinado número de trayectorias simuladas constituye una muestra de una variable aleatoria. El objetivo es la estimación de la esperanza matemática de dicha variable aleatoria. Los principios elementales de la inferencia estadística nos dicen que la media muestral es el mejor estimador y además (véase apéndice II), el cálculo de intervalos de confianza permite valorar el grado de aproximación alcanzado y el tamaño muestral que sería necesario para que el error de estimación esté acotado por un valor predeterminado con probabilidad también predeterminada. Por otra parte, la simulación permite tamaños muestrales muy elevados con costes muy pequeños que a lo sumo pueden traducirse en minutos de tiempo de proceso del ordenador personal. Es evidente que lo que se ha dicho para una opción puede aplicarse reiteradamente en varios instantes del horizonte

temporal para así determinar el valor de una opción compuesta sin ninguna dificultad adicional. De este modo podemos proporcionar el siguiente algoritmo para calcular el valor de una opción de crecimiento múltiple.

Algoritmo 5.1

- 1- Para $l=1, 2, \dots, n$ (tamaño muestral) repetir apartados 2 a 4
- 2- Se simula una trayectoria del proceso y se hace $D_l = 0$
- 3- Para $i = 1, 2, \dots, k$ (nº de Opciones) repetir 4 a 5.
- 4- Compruebe si la opción es ejercida o no, según la certeza de $C_i \times V(t_i) > I_i$.
Siendo t_i el tiempo de expiración de la opción, C_i la proporción del subyacente en la que el proyecto crecerá e I_i el capital adicional que costará dicha expansión.

- 5- Para cada opción ejercida se calcula la diferencia

$$ValorActual(C_i \times V(T)) - ValorActual(I_i)$$

y se acumulan dichas diferencias en D_l .

- 6- Se calcula la media aritmética y cuasi-varianza de los valores D_l y el correspondiente intervalo de confianza.

Nota: Los valores actuales se calculan descontando a tasa de interés continuo utilizando tipos de interés sin riesgo en la deriva del proceso estocástico simulador del subyacente.

La media aritmética es el estimador puntual del valor de la opción múltiple de crecimiento.

El algoritmo también es válido para el caso de una sola opción. Este algoritmo está formulado bajo el mismo supuesto que en Trigeorgis(1996) donde a pesar de enlazar varios crecimientos del subyacente en una opción múltiple éstos no se componen (según el criterio de interés compuesto) sino cada crecimiento se aplica al subyacente inicial y por separado. De este modo, el valor final de una trayectoria cualquiera del subyacente más una secuencia de dos opciones de crecimiento es

$$V'(T) = \begin{cases} V(T) \\ V(T) \times (1 + C_1) \\ V(T) \times (1 + C_2) \\ V(T) \times (1 + C_1) + V(T) \times (1 + C_2) \end{cases}$$

dependiendo de que no se ejerza ninguna uno o ambas de las opciones respectivamente.

Un enfoque más realista debería proponer un crecimiento, según el siguiente esquema:

$$V'(T) = \begin{cases} V(T) \\ V(T) \times (1 + C_1) \\ V(T) \times (1 + C_2) \\ V(T) \times (1 + C_1) \times (1 + C_2) \end{cases}$$

Para este último caso el algoritmo de valoración de la opción sería el siguiente

Algoritmo 5.2

- 1- Para $l=1, 2, \dots, n$ (tamaño muestral) repetir apartados 2 a 6.
- 2- Se simula una trayectoria del proceso. Hacer $Crecimiento = 1$ y $VactInvAdic = 0$
- 3- Para $i = 1, 2, \dots, k$ (n° de Opciones) repetir apartados 4 a 5.

- 1- Compruebe si la opción es ejercida o no según la certeza de

$$C_i \times Crecimiento \times V(t_i) > I_i.$$

Siendo t_i el tiempo de expiración de la opción, C_i la proporción del subyacente en la que el proyecto crecerá e I_i el capital adicional que costará dicha expansión.

- 2- Si la opción es ejercida calcúlese

$$Crecimiento = Crecimiento \times (1 + C_i)$$

$$VactInvAdic = VactInvAdic + ValorInicial(I_i)$$

- 3- Se calcula el beneficio actualizado generado por la opción en esa trayectoria mediante la expresión

$$BAOP_l = ValorInicial((Crecimiento - 1) \times V(T)) - VactInvAdic$$

- 4- Calcúlese la media aritmética y cuasi-varianza de los valores $BAOP_l$ y el correspondiente intervalo de confianza.

6. EJEMPLOS.

6.1 Deriva y volatilidad constantes.

Las hipótesis iniciales sobre el subyacente son las mismas que fueron utilizadas para la obtención de la fórmula de Black-Scholes (1973); por consiguiente, en el caso de una opción simple, el método de simulación proporcionará una estimación del valor de la opción que dicha fórmula proporciona. La citada fórmula de B-S puede utilizarse

para comparar resultados. La figura 1 muestra la salida sobre hoja Excel del correspondiente macro en VB aplicando los algoritmo 4.1 y 5.1 para la simulación de trayectorias y para la estimación del valor de una opción simple cuyas características se reflejan en B6:D6. En el rango G6:I6 aparece el estimador del valor de la opción y el intervalo de confianza al 95% en F25 aparece el valor calculado mediante B-S. El tamaño de muestra necesario para alcanzar una cota de error en torno al 2% se realiza en el rango B10:D14 (véase apéndice II) utilizando una premuestra de tamaño 10.000 los objetivos realmente alcanzados con la muestra definitiva aparecen en el rango G10:I14. El tiempo de proceso en un Pentium III a 800 Mhz ha sido de 14,5 segundos. La tasa libre de riesgo (C2) es la media anual equivalente de la ETTI usada posteriormente (figuras 3 y 4)

Figura 1

Microsoft Excel - Cálculo de opciones mediante simulación Quitando interacción									
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ? Stat_FPG									
J24 =									
	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	V0	Mu	Sigma	T	Datos del subyacente				
2	1000	0,076	0,25	15					
3									
4	Características de la Opción					Resultado			
5	Vencimiento	Crecimiento	Invers. Adic.	Nº Simulac.	nopc	Li	Valor Opc.	Ls	
6	7	0,5	500	65000	1	228,32983	232,91633	237,50282	
7									
8									
9									
10	Tamaño de muestra necesario para			Opción Simple Deriva y		Cotas de error alcanzadas con			
11	alcanzar las cotas de error propuestas					el tamaño muestral dado			
12		Relativo	Absoluto				Relativo	Absoluto	
13	Cota de error	2,00%	4,6583265			Cota de Error	1,97%	4,5864928	
14	n Necesario=	59574							
15									
16			Prueba mediante formula de B-S						
17	Crecim*V0	Vencimiento	Precio Ejerc.						
18	500	7	500						
19		z1	z2						
20		1,1350273	0,4735895						
21									
22		Black-Scholes							
23		235,5652945							
24	Sen								
< > \051 / \OC1 / \OC2 / \OC2 / \OC3 / \OC3 / Hoja3 /									
Lista									
Inicio Mis documentos VALORACIÓN DE OPC... Microsoft Excel - C... Microsoft Visual Basic - ...									

La figura 2 muestra el valor estimado para la opción compuesta de aquellas tres opciones simples cuyas características se recogen en el rango B6:D8. El radio del intervalo de confianza es de 11,24 u.m. que representa una cota de error relativo en torno al 2% aproximadamente (al 95% de confianza) para la estimación de 541,50 u.m. del valor de esta opción múltiple. Obviamente la fórmula B-S no es aplicable al. En C14

se muestra el tamaño muestral necesario para alcanzar la precisión fijada en C13 y D13 (Cota de error absoluto o radio del intervalo y cota de error relativo correspondiente) lo cual proporciona una visión del número de trayectorias que se necesitan simular para alcanzar determinados niveles de precisión en la estimación del valor de la opción. Se ha hecho una simulación previa de tamaño 10000 esta primera muestra ha servido para determinar un tamaño muestral definitivo de 290.000. La precisión que se estima ha sido finalmente alcanzada se muestra en G10:I14. El tiempo de proceso en un Pentium III a 800 Mhz ha sido de 45,5 segundos. En B17:H24 se muestran los resultados obtenidos utilizando la metodología de Trigeorgis(1996).

Figura 2

Microsoft Excel - Cálculo de opciones mediante simulación Quitando Interacción

ArchivoEdiciónVerInsertarFormatoHerramientasDatosVentanaStat_FPG

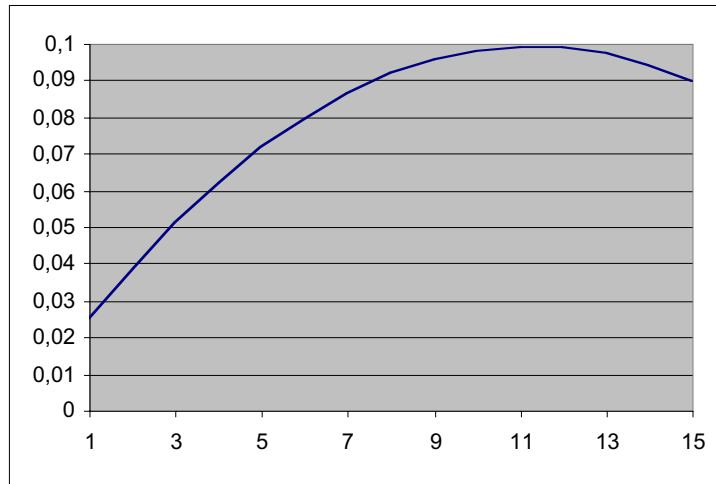
<

6.2 Deriva variable siguiendo una ETTI

El subyacente ahora es un proceso de difusión del tipo Browniano Geométrico, pero la tasa libre de riesgo no es constante sino que obedece la estructura temporal de tipos de interés de tipo parabólico que se muestra en el gráfico 1, y que está definida

mediante la ecuación $r(t) = 0,01 + 0,0158t - 0,0007t^2$. El algoritmo de simulación utilizado es el que se especifica en el epígrafe 4.2.

Gráfico 1: ETTI



La figura 3 muestra el valor 203,07 (en G6) de la opción simple cuyas características pueden encontrarse en A6:C6. La cota de error relativo es aproximadamente 2% con un nivel de confianza del 95%. Para alcanzar estos niveles de precisión ha sido necesaria una muestra simulada de 150.000 trayectorias con un tiempo de proceso de 31,5 seg.. Los resultados para el caso de tres opciones simples se muestran en la figura 4. Las características de las tres opciones pueden verse en A4:C8 y el valor de la opción compuesta por estas tres es 488,63 (en G6). Estimación que también posee una precisión aproximada del 2% (nivel de confianza del 95%) y que se ha conseguido mediante una muestra de tamaño 80.000 con un tiempo de proceso de aproximadamente 57 segundos. Los tamaños de muestra necesarios han sido calculados en una etapa previa mediante sendas muestras simuladas de tamaño 10.000 que han servido para hacer una primera estimación de la dispersión (véase apéndice II). Se han utilizado los algoritmos 5.1 y 4.2 en ambos casos

Figura 3

Microsoft Excel - Cálculo de opciones mediante simulación Quitando interacción								
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ? Stat_FPG								
A23								
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	V0	Prim.Func.De	t	Sigma	T	Datos del subyacente		
2	1000	1,14	15	0,25	15	Deriva Variable		
3								
4	Características de la Opción				Resultado			
5	Vencimiento	Crecimiento	Invers. Adic.	Nº Simulac.	nopc	Li	Valor Opc.	Ls
6	7	0,5	500	150000	1	198,939076	203,074012	207,208948
7								
8								
9								
10	Tamaño de muestra necesario para			Opción Simple Deriva = ETTI Volatilidad constante	Cotas de error alcanzadas con			
11	alcanzar las cotas de error propuestas				el tamaño muestral dado			
12		Relativo	Absoluto			Relativo	Absoluto	
13	Cota de error	2,00%	4,06148024		Cota de Erro	2,04%	4,13493593	
14	n Necesario=	162730						
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								

Figura 4

Microsoft Excel - Cálculo de opciones mediante simulación Quitando interacción								
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ? Stat_FPG								
A16								
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	V0	Prim.Func.De	t	Sigma	T	Datos del subyacente		
2	1000	1,14	15	0,25	15	Deriva Variable		
3								
4	Opciones					Resultado		
5	Vencimiento	Crecimiento	Invers. Adic.	Nº Simulac.	nopc	Li	Valor Opc.	Ls
6	7	0,5	500	80000	3	479,029547	488,630575	498,231603
7	8	0,3	500					
8	11	0,4	500					
9								
10	Tamaño de muestra necesario para			Opción Compuesta Deriva = ETTI Volatilidad constante	Cotas de error alcanzadas con			
11	alcanzar las cotas de error propuestas				el tamaño muestral dado			
12		Relativo	Absoluto			Relativo	Absoluto	
13	Cota de error	2,00%	9,7726115			Cota de Erro	1,96%	9,60102793
14	n Necesario=	78561						
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
\\051\OC1\OS2\OC2\OS3\OC3\Hoja3/								
Listo								
Inicio Mis documentos VALORACIÓN DE OPC... Microsoft Excel - C... Microsoft Visual Basic - ...								

Figura 5

Microsoft Excel - Cálculo de opciones mediante simulación									
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ? Stat_FPG									
B28 = 40 seg									
B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	V0	Mu	Sigma	T	Datos del subyacente				
2	1000	0,076	0,25	15					
3									
4	Opciones					Resultado			
5	Vencimiento	Crecimiento	Invers. Adic.	Nº Simulac.	nopc	Li	Valor Opc.	Ls	
6	7	0,5	500	50000	3	959,330055	977,474728	995,619401	
7	8	0,3	500						
8	11	0,4	500						
9									
10	Tamaño de muestra necesario para alcanzar las cotas de error propuestas			Opción compuesta Deriva y Volatilidad constantes		Cotas de error alcanzadas con el tamaño muestral dado			
11		Relativo	Absoluto				Relativo	Absoluto	
12	Cota de error	2,00%	19,5494946						
13	n Necesario=	42984					Cota de Error	1,86%	18,144673
14									
15									
16									
17	Salida de Vaflor								
18	Opciones				Resultado				
19	Nombre	Año	Capital	Porcentaje					
20	Crece	7	500	50,00%	Van tradicional =		1000,00		
21	Crece	8	500	30,00%	Van ampliado =		1542,53		
22	Crece	11	500	40,00%					
23					Valor de la Flexibilidad		542,53		
24					Porcentaje =		54,25		
25									

Figura 6

Microsoft Excel - Cálculo de opciones mediante simulación									
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ? Stat_FPG									
A17 =									
A	B	C	D	E	F	G	H		
1	V0	Prim.Func.De	t	Sigma	T	Datos del subyacente			
2	1000	1,14	15	0,25	15	Deriva Variable			
3									
4	Opciones					Resultado			
5	Vencimiento	Crecimiento	Invers. Adic.	Nº Simulac.	nopc	Li	Valor Opc.	Ls	
6	7	0,5	500	60000	3	874,30898	891,054037	907,799095	
7	8	0,3	500						
8	11	0,4	500						
9									
10	Tamaño de muestra necesario para alcanzar las cotas de error propuestas			Opción Compuesta Deriva = ETTI Volatilidad constante		Cotas de error alcanzadas con el tamaño muestral dado			
11		Relativo	Absoluto				Relativo	Absoluto	
12	Cota de error	2,00%	17,8210807						
13	n Necesario=	53002					Cota de Error	1,88%	16,7450576
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									

Las figuras 5 y 6 muestran los resultados correlativos a los expuestos en las figuras 2 y 4 respectivamente, pero utilizando el algoritmo 5.2 para la valoración de la opción. Como puede apreciarse se obtiene una valoración netamente superior en este último caso. Los tiempos de proceso utilizados fueron de 32 y 44 segundos respectivamente

7. BIBLIOGRAFÍA.

- Black, F. y Scholes, M., (1973): The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, Mayo-Junio.
- Brealey, R. A. Y S.C. Myers, (1993): *Fundamentos de financiación empresarial*, McGrawHill, cuarta edición.
- Dixit, A.K., y R.S. Pindyck, (1994): *Investment under Uncertainty*, Princenton University Press.
- Geske, R., (1979): The valuation of Compound Options, *Journal of Financial Economics*, 7.
- Hayes, R.H. y W.J., Abernathy, (1980): Managing our Way to Economic Decline, *Harvard Business Review*, Julio-Agosto.
- Hayes, R.H. y D.A., Garvin, (1982): Managing as if Tomorrow Mattered, *Harvard Business Review*, 50, (3).
- Kao E.P.C. (1997); *An Introduction to Stochastic Processes*; Duxbury Press New York.
- Kemna, AGZ, (1991): Cases Studies on Real Options, *Financial Management*, Autumn.
- Margrabe, W., (1978): The value of an Option to exchange one asset for another, *Journal of Finance*, 33, (1), Marzo.
- McDonald, R. Y D. Siegel, (1985): Option Pricing When the Underlying Asset Earns a Below-Equilibrium Rate of Returns: A Note, *Journal of Finance*, 39. Marzo.
- Myers, S. C., (1977): Determinants of corporate borrowing, *Journal of Financial Economics*, 5, (2), November, pp. 147-175.
- Myers, S. C., (1984): Finance Theory and Financial Strategy, *Interface*, Enero-Febrero.
- Myers, S.C., (1987): Finance theory and financial strategy, *Midland Corporate Finance Journal* 5.
- Tapiero C.S. (1998); *Applied Stochastic Models and Control For Finance and Insurance*; Kluwer A.P. London.
- Trigeorgis, L. (1996): *Real Options. Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, The MIT Press, London.
- Weston, J.F., y T.E. Copeland, (1992): *Finanzas en Administración*, vol. 1, McGraw-Hill, 9ª edición.

APÉNDICE I.

Presentamos En este apéndice una breve descripción del calculo integral de Íto necesario para justificar la metodología de simulación de trayectorias descrita en los apartados 4.1 a 4.4.

1.- Lema de Íto.

Dado un proceso estocástico con ecuación diferencial

$$dX = \mu(X, t)dt + \sigma(X, t)dZ \quad (20)$$

el lema de Íto permite conocer la ecuación diferencial estocástica asociada con procesos que se obtienen como una función de X y de t . En concreto si $Y = Y(X, t)$ entonces el nuevo proceso verifica la ecuación diferencial estocástica, Kao(1996)

$$dY = \left(Y_t + Y_x \mu(X, t) + \frac{1}{2} Y_{xx} \sigma^2(X, t) \right) dt + Y_x \sigma(X, t) dZ \quad (21)$$

Si en particular X es un proceso de Wiener estandar ($\mu = 0$ y $\sigma = 1$ en (20)), la ecuación (21) queda reducida a

$$dY = \left(Y_t + \frac{1}{2} Y_{zz} \right) dt + Y_z dZ \quad (22)$$

Utilizando (22), no es difícil comprobar que la ecuación diferencial

$$dY = \mu Y dt + \sigma Y dZ \quad (23)$$

tiene solución general

$$Y(t) = \text{Exp} \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma Z(t) + c \right\} \quad (24)$$

Imponiendo la condición inicial $Y(0)=Y_0$ y teniendo en cuenta que $Z(0)=0$ se tiene finalmente que

$$Y(t) = Y(0) \text{Exp} \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma Z(t) \right\} \quad (25)$$

integrando la ecuación diferencial en el intervalo de tiempo $(t - \tau, t)$ se obtiene

$$Y(t) = Y(t - \tau) \text{Exp} \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau + \sigma Z(\tau) \right\} \quad (25)$$

Teniendo en cuenta que $Z(\tau)$ es un proceso de Wiener estándar, y que por tanto tiene la distribución $N(0, \tau)$, resulta inmediato que $X = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma Z$ posee la distribución

$$N \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right) \quad (26)$$

y que (25) puede escribirse de la siguiente forma

$$Y(t) = Y(t - \tau) \text{Exp}(X(\tau)) \quad (27)$$

Expresión que ha sido utilizada como base del algoritmo de simulación en 4.1, aprovechando la propiedad de incrementos independientes de Z y consecuentemente de X .

De forma análoga puede comprobarse que la solución general de la ecuación diferencial

$$dY = Yr(t)dt + Y\sigma dZ \quad (28)$$

tiene solución general

$$Y(t) = \text{Exp} \left\{ \left(R(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right) + \sigma Z(t) + C \right\} \quad (29)$$

donde

$$R(t) = \int_0^t r(u) du \quad (30)$$

Imponiendo la condición inicial $Y(0) = Y_0$ se obtiene

$$Y(t) = Y_0 \text{Exp} \left\{ \left(R(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right) + \sigma Z(t) \right\} \quad (31)$$

E integrando en el intervalo $(t - \tau, t)$

$$Y(t) = Y(t - \tau) \text{Exp} \left\{ R(t) - R(t - \tau) - \frac{1}{2} \sigma^2 \tau + \sigma \Delta Z(\tau) \right\} \quad (32)$$

De forma análoga a como se procedió anteriormente se puede hacer

$$X(t, \tau) = R(t) - R(t - \tau) - \frac{1}{2} \sigma^2 \tau + \sigma \Delta Z(\tau) \quad (33)$$

y escribir (32) como

$$Y(t) = Y(t - \tau) \text{Exp}(X(t, \tau)) \quad (34)$$

Expresión que es la base del algoritmo de simulación expuesto en 4.2 aprovechando la propiedad de incrementos independientes de Z y que es heredada por X con una adecuada selección de los intervalos de tiempo.

APÉNDICE II

Los tamaños de muestras simuladas son tan elevados que debido al Teorema Central del Límite, puede considerarse sin lugar a dudas que

$$\frac{(\bar{x} - \mu) \sqrt{n}}{S} \rightarrow N(0,1) \quad (37)$$

donde μ es el valor de la opción que pretendemos estimar; S y n son la desviación típica y el tamaño de la muestra respectivamente. Esto nos permite, Herrerías y Palacios (1995), calcular el siguiente intervalo de confianza para μ

$$P\left(\bar{x} - Z_0 \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_0 \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (38)$$

siendo Z_0 el cuantil $1 - \alpha/2$ de la distribución Normal estandar. Dicho intervalo puede escribirse alternativamente en la siguiente forma

$$P\left(|\bar{x} - \mu| < Z_0 \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (39)$$

poniendo de manifiesto que el error absoluto de estimación (mediante la media de la muestra) será con probabilidad $1 - \alpha$ inferior a la cota

$$e = Z_0 \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (40)$$

Si ahora utilizamos una muestra previa para obtener una primera aproximación de la dispersión S se puede despejar n en función de e

$$n = \left(\frac{Z_0 S}{e}\right)^2 \quad (41)$$

Expresión que permite calcular aproximadamente el tamaño de muestra necesario para que la cota de error alcance unos niveles prefijados. La cota de error relativo se calcula obviamente como

$$r = \frac{e}{\bar{x}} \times 100 \quad (42)$$

y el error absoluto que corresponde a un r dado es también obviamente

$$e = \frac{r \times \bar{x}}{100} \quad (43)$$

Con lo cual fijada, por ejemplo, en 1% la cota de error relativo, con la muestra previa, puede calcularse la cota de error absoluto mediante (43) y a continuación el tamaño de muestra necesario mediante (41). Los valores de la media y desviación típica de la muestra definitiva permitirán, usando (40) y (42) calcular los grados de precisión realmente alcanzados.